**Муниципальное бюджетное образовательное учреждение**

**средняя общеобразовательная школа №48**

**г. Нижний Новгород**

**Работа реферативного характера с элементами самостоятельного поиска**

**на Всероссийский конкурс «Красота и величие математики»**

***Принцип Дирихле***



|  |  |
| --- | --- |
|  | Работу выполнила:Слетова Екатерина,ученица 7А классаМБОУ СОШ №48г. Нижний Новгород |
|  | Руководитель:Пономарева Елена Ираджевна,учитель математики первой категории |

**Нижний Новгород, 2015г.**

Содержание

[Введение 3](#_Toc412473974)

1. [Принцип Дирихле 4](#_Toc412473975)

2. [Обобщенный принцип Дирихле 8](#_Toc412473976)

3. [Принцип недостаточности 12](#_Toc412473977)

4. [Геометрические задачи на принцип Дирихле 14](#_Toc412473978)

Заключение 20

[Литература 21](#_Toc412473979)

# Введение

Математика – одна из древнейших наук. Она существовала и была актуальна ещё до нашей эры и остаётся таковой и сейчас. За время развития математики было создано много формул, правил и теорий с целью решения задач различными способами. Одним из ведущих математиков, работавших над исследованием различных способов решения задач, был немецкий математик Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле (член Берлинской и Петербургской академий наук), который внёс большой вклад в математический анализ, теорию чисел и теорию функций, являлся. Ему принадлежат серьезные открытия в самых различных областях математики, механики и математической физике. Он вывел множество формул и принципов решения задач. Один из них так и называется - Принцип Дирихле.

**Актуальность изучения темы** состоит в оптимальности решения многих математических задач повышенной сложности и задач на математических олимпиадах и конкурсах методами на основе принципа Дирихле. Однако в школьных учебниках математики принцип Дирихле не рассматривается. Поэтому эта тема для меня особенно интересна.

**Цель выполнения работы:** Научиться решать задачи повышенной сложности с применением принципа Дирихле.

**Задачи:**

1. Ознакомиться с принципом Дирихле и его различными формулировками;
2. Выявление круга задач в основе решения, которых лежит принцип Дирихле.

# 1. Принцип Дирихле

Принцип Дирихле «принцип ящиков»- утверждение было сформулировано Дирихле в 1834 году.

|  |
| --- |
| **Ио́ганн Пе́тер Гу́став Лежён-Дирихле́** |

Согласно принципу Дирихле в любой совокупности из *n*множеств, содержащих в общей сложности более *n*элементов, есть хотя бы одно множество, содержащее не менее двух элементов. Наиболее известная форма Принципа Дирихле: если в *n*»ящиках» лежит *n+1*«предмет», то хотя бы в одном из «ящиков» лежит не меньше двух «предметов».

Необходимо отметить, что не важно, в каком именно ящике находятся, по крайней мере, два предмета. Также не важно, сколько предметов в этом ящике, и сколько всего таких ящиков. Имеет значение только то, что существует хотя бы одна коробка с не менее чем двумя предметами (два или более).

Традиционно в литературе этот принцип также встречается под названием: «принцип кроликов и клеток» и объясняют его на примере кроликов в клетках: если общее число кроликов больше числа клеток, в одной из этих клеток наверняка сидит более одного кролика. Также этот принцип может выглядеть следующим образом: в n клетках невозможно рассадить поодиночке *n+1* кроликов, таким образом, найдётся клетка, где сидят не менее двух кроликов. Если рассадить n кроликов в n-1 клеток, то найдется, по крайней мере, одна свободная клетка или, если число клеток больше числа кроликов то, как минимум одна клетка пуста.

В англоязычной литературе утверждение известно как «принцип голубей и ящиков».

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| **9**клеток содержат**7**голубей, по принципу Дирихле хотя бы одна клетка содержит не больше 7/9 голубя (т.е ноль). | **9**клеток содержат**10**голубей, по принципу Дирихле хотя бы в одной клетке находятся более одного голубя. |

Этот принцип можно сформулировать в терминах отображений между множествами: при отображения множества P, содержащего *n+1* элементов, в множество Q, содержащее n элементов, найдутся два элементы множества P, имеющие один и тот же образ.

**Задача 1.** В клетках таблицы 3×3 расставлены числа: -1, 0 и 1. Рассмотрим восемь сумм: суммы трёх чисел в каждой строке, в каждом столбце и по двум диагоналям. Могут ли быть все эти суммы различны?

***Решение.*** Предположим, что «клетками» будут все различные значения всех трех чисел, каждое из которых принимает значение 0, 1 или -1. Этих значений будет 7: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. А «кроликами» будут наборы из трёх чисел, расположенные в одном столбце, или в одной строке, или по одной из двух диагоналей таблицы. Рассаживаем кроликов в клетки , где значение суммы равно сумме чисел этого «кролика»-набора. Тогда согласно принципу Дирихле найдётся «клетка», где сидят не менее двух кроликов. А это значит, что найдутся две рассматриваемые тройки чисел, для которых суммы равны. Итак, все суммы различными быть не могут.

**Задача 2.** Из любых трёх целых чисел можно выбрать два, сумма которых чётна. Докажите это.

***Решение.***За «клетки» примем чётность чисел, их две (чётные числа и нечётные). За «кроликов» - числа. Используя принцип Дирихле, получим, что вкакой-то из двух «клеток» будет по одинаковому числу «кроликов». Это означает, что найдутся два числа одинаковой чётности. А если имеется два числа одинаковой чётности, то сумма этих чисел будет чётной.

**Задача 3.** Шесть школьников съели семь конфет. Докажите, что один из них съел не менее двух конфет.

***Решение.***Получим, что найдётся «клетка», где сидят не менее двух «кроликов». А это и означает, что найдётся школьник, который съел хотя бы две конфеты.

**Задача 4.** В классе 15 учеников. Найдется ли месяц, в котором отмечают свои дни рождения не меньше, чем два ученика этого класса?

***Решение.*** Пусть «клетками» будут месяцы. Возьмём за «клетки» школьников, а за «кроликов» конфеты. Используя принцип Дирихле, а «кроликами» - ученики. Используя принцип Дирихле получим, что найдётся «клетка», где сидят не менее двух «кроликов». А это и означает, что найдётся месяц, в котором отмечают свои дни рождения хотя бы два ученика.

**Задача 5.** В берёзовой роще растет 800000 деревьев. На каждой берёзе - не более 500000 листьев. Доказать, что в роще есть хотя бы две берёзы с одинаковым числом листьев.

***Решение.*** Решение построим на методе от противного. Мы допустим, что в данной роще нет двух берёз с равным числом листьев. В таком случае в роще существует не более одной берёзы (одна берёза или ни одной), имеющей один лист. Аналогично, в роще существует не более одной берёзы с двумя листьями и т.д., существует не более одной берёзы с 499999 листьями, существует не более одной берёзы с 500000 листьями. Таким образом, не более 500000 берёз в роще обладают числом листьев от 1 до 500000. Поскольку всего растут 800000 берёз, и каждая берёза имеет не более 500000 листьев, следует, что найдутся хотя бы две берёзы с одинаковым числом листьев.

***Замечание.*** Важно отметить, что решение задачи не зависит от конкретных чисел 800000 (количество берёз) и 500000 (наибольшее число листьев). Принципиален был только тот факт, что число 800000 строго больше 500000. В доказательстве предполагается, что не существует ни одной берёзы без листьев, однако задача и доказательство справедливы и в этом случае.

В выше представленных задачах нужно было только найти, что принять за «кроликов», а что за «клетки», и применит принцип Дирихле. В следующей задаче надо не только найти, что принять за «кролики» и за «клетки», но и найти верное количество клеток.

**Задача 6.** Докажите, что в Вашем классе найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей среди своих одноклассников.

***Решение.*** Предположим, что в классе 30 человек, тогда за «кроликов» возьмём учеников, а за «клетки» количество друзей. Друзей у каждого человека может быть 0,1,...,29 т.е. у нас получится 30 «клеток». Но «клетки» 29 и 0 одновременно существовать не могут т.к. если человек имеет 29 друзей, то каждый из его друзей будет иметь хотя бы одного друга, значит всего может быть 29 «клеток» (0,1,...,28 или 1,2,...,29). Используя принцип Дирихле, получим, что найдётся «клетка», где сидят не менее двух «кроликов». А это и означает, что найдутся два человека имеющие одинаковое число друзей.

Из выше приведенных задач на принцип Дирихле следует, что для правильного решения необходимо верно определить что будет «кроликами», а что «клетками». Кроме того для решения задачи на принцип Дирихле, исходя из условия, важно найти правильное число «кроликов» и «клеток».

#

# 2. Обобщенный принцип Дирихле

Очень часто в задачах применяется не принцип Дирихле, а некоторое его свойство, которое называется обобщённый принцип Дирихле.

Рассмотрим задачи с применением не принципа Дирихле, а некоторого его обобщения, которое сформулировано ниже, и которое обычно встречается в задачах.

Обобщение принципа Дирихле: даны n клеток и *nk + 1* кроликов размещены в эти клетки. Тогда найдется клетка, где сидят не менее *k + 1* кроликов.

**Задача 1.** В классе учится 29 человек. Саша Иванов допустил в диктанте 13 ошибок, и никто другой не сделала большего числа ошибок. Доказать, что, по крайней мере, трое учащихся сделали одинаковое число ошибок.

***Решение.***Примем за «клетки» всевозможные варианты количества ошибок. Их 14, так как школьники могут сделать 0, 1, ..., 13 ошибок. А за «кроликов» примем школьников, которые писали диктант. Их по условию 29. Каждого из них сажаем в клетку, которая соответствует количеству ошибок сделанных им. Тогда получим, что найдётся «клетка», в которой сидят по меньшей мере три «кролика», а это и означает, что найдутся трое школьников, сделавших одинаковое число ошибок.

**Задача 2.** В пяти классах школы учатся 160 человек. Доказать, что найдутся 4 человека, у которых день рождения приходится на одну и туже неделю.

***Решение.***В году может быть максимально 53 недели. Их и примем за «клетки» а, за «кроликов» приме ребят. Рассаживаем «кроликов» по тем «клеткам», которые соответствуют их дням рождения. В силу принципа Дирихле найдётся «клетка» по меньшей мере с четырьмя «кроликами», а это и означает, что найдётся неделя, когда день рождения сразу у четырёх человек.

**Задача 3.** У человека на голове не более 400000 волос, в Москве более 8 млн. жителей. Докажите, что найдутся 20 москвичей с одинаковым числом волос.

***Решение.*** По условию на голове у каждого из москвичей может быть от 0 до 400000 волос имеем всего 400001 возможность. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда лысых москвичей найдется не более 19, имеющих 1 волос тоже не более 19, ..., имеющих 400000 волос тоже не более 19. Но тогда всего москвичей не более 19 ×400001 = 7600019, что меньше 8 миллионов противоречие.

При решении задач с использованием принципа Дирихле можно поступать двояко:

**1)** Допускаем противное и вычисляем, сколько необходимо значений. Сравнивая с данными условиями, приходим к противоречию (задачи 1, 2).

**2)** Выбирать, что принять за «клетки» и что взять за «кроликов». Применяя непосредственно принцип Дирихле, устанавливаем существование того, что искали (задача 3).

Также с помощью принципа Дирихле можно решать задачи, в которых, надодостать какое либо количество предметов разного цвета или типа (например: пары носков или перчаток разных цветов). Данные задачи приведены ниже.

**Задача 4.** В ящике лежат 10 пар чёрных и 10 пар красных перчаток одного размера. Сколько перчаток надо вытащить из ящика наугад, чтобы наверняка среди них были:

**а)** Две перчатки одного цвета;

**б)** Одна пара перчаток одного цвета;

**в)** Одна пара перчаток разных цветов?

***Решение.* а)** Если за «клетки» принять цвета перчаток, то, взяв любые три печатки, получится, что в одной из «клеток» находятся два «кролика»- перчатки. А это и требуется.

**б)** Можно взять 20 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать одноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 21. Доказать, что число 21 является искомым.

Примем за «клетки» цвета перчаток (их два). В качестве «кроликов» возьмём перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из «клеток» будет не меньше 11 «кроликов». Это означает, что найдётся 11 перчаток одного цвета. Но имеется только 10 пар перчаток одного цвета, поэтому все они не могут быть на одну руку. Значит, среди этих 11 перчаток найдётся одна пара перчаток одного цвета.

**в)** Можно взять 20 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать разноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 21. Доказать, что число 21 является искомым.

Из всех перчаток можно составить разноцветные пары. Разделим пары на две группы. В первую группу будут входить пары у в которых правая перчатка чёрная, а левая красная. Во вторую группу - пары у в которых правая перчатка красная, а левая чёрная. Эти группы и будут «клетками», а «кроликами» будут перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из «клеток» будет не меньше 11 «кроликов». Это означает, что найдётся 11 перчаток из одной группы. Но имеется только 10 пар перчаток данной группы, поэтому все они не могут быть на одну руку или одного цвета. Значит, среди этих 11 перчаток найдётся пара перчаток разных цветов.

**Задача 5.** Возникает вопрос: а если добавить к этим перчаткам ещё 10 пар белых перчаток? Какое количество перчаток нужно было бы тогда вытащить, чтобы среди них наверняка были:

**а)** Две перчатки одного цвета;

**б)** Одна пара перчаток одного цвета;

**в)** Одна пара перчаток разных цветов?

***Решение.* а)** Если за «клетки» принять цвета, а за «кроликов» перчатки, то, выбирая 4 любых «кролика»-перчатки, получится, что в одной «клетке» находится по крайней мере два «кролика». Значит, искомое число равно 4 (Ясно, что из трёх разноцветных перчаток нельзя найти двух перчаток одного цвета).

**б)** Можно взять 30 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать одноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 31. Доказать, что число 31 является искомым.

Примем за «клетки» цвета перчаток (их три). В качестве «кроликов» возьмём перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из «клеток» будет не меньше 11 «кроликов». Это означает, что найдётся 11 перчаток одного цвета. Но имеется только 10 пар перчаток одного цвета, поэтому все они не могут быть на одну руку. Значит, среди этих 11 перчаток найдётся одна пара перчаток одного цвета.

**в)** Можно взять 30 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать разноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 31. Доказать, что число 31 является искомым.

Из всех перчаток можно составить разноцветные пары. Разделим пары на три группы. В первую группу будут входить пары, в которых правая перчатка чёрная, а левая любого другого цвета. Во вторую группу - пары, в которых правая перчатка красная, а левая любого другого цвета. В третью группу – пары, в которых правая перчатка белая, а левая любого другого цвета. Эти группы и будут «клетками», а «кроликами» будут перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из «клеток» будет не меньше 11 «кроликов». Это означает, что найдётся 11 перчаток из одной группы. Но имеется только 10 пар перчаток данной группы, поэтому все они не могут быть на одну руку или одного цвета. Значит, среди этих 11 перчаток найдётся пара перчаток разных цветов.

Чаще в задачах применяется обобщённый принцип Дирихле. С помощью данных принципов можно решать различные задачи, в том числе и задачи на вытягивание предметов. Задачи на данные принципы можно решать и методом от противного.

# 3. Принцип недостаточности

У принципа Дирихле есть аналогичные ему принципы. Таковым является принцип недостаточности. Судя по названию, эта формула основывается на недостаточности какого-то количества предметов. Так и есть. Ниже приведена формула принципа недостаточности и её доказательство.

Если разместить не более $\frac{n(n-1)}{2}$*−1*кроликов в *n* клеток, то найдутся хотя бы две клетки, в которых сидят по одинаковому числу кроликов.

***Доказательство.*** Допустим, что в каждой из n клеток по разному числу кроликов. Это означает, что во всех этих клетках находится не менее *0+1+2+...+n - 1* кроликов. Подсчитаем эту сумму. Для этого будем складывать пары *0+n-1*, *1+n-2*, *2+n-3*... . Замечаем, что сумма этих пар постоянна и равна *n-1*. Количество пар равно $\frac{n}{2}$, если *n* чётное; если же *n*-нечётное, то можем рассматривать только $\frac{n-1}{2}$пар и прибавить к ним средний член, который равен $\frac{n-1}{2}$. В сумме получается число, не зависящее от чётности *n*, и оно равно $\frac{n(n-1)}{2}$*×𝑛*, т.е. кроликов должно быть больше чем у нас есть. Значит сделанное предположение неверно, т.е. найдутся две клетки, где сидят по одинаковому числу кроликов.

**Задача 1.** 15 мальчиков собрали 100 орехов. Доказать, что два из них собрали одинаковое число орехов (каждый набрал хотя бы по одному ореху).

***Решение.***Принимая за «клетки» корзинки мальчиков, за «кроликов» - орехи и применяя принцип недостаточности *(n=15)*, получаем, что в каких-то двух «клетках» находится по равному числу кроликов. Это и означает, что найдутся два мальчика, которые собрали по одинаковому числу орехов.

**Задача 2. а)** У 21 мальчика имеется 200 орехов. Доказать, что как бы они не разделили их, найдутся два мальчика, которым досталось поровну орехов(может оказаться, что орехов им не досталось совсем).

**б)** Пусть дано *k* орехов. Какому минимальному числу мальчиков можно раздать эти орехи так, чтобы наверняка нашлось двое, которым их досталось поровну.

***Решение.* а)** Принимаем за «клетки» мальчиков. За «кроликов» орехи. Применяя принцип недостаточности *(n=21)*, получаем, что в каких-то двух «клетках» находится по равному числу кроликов. Это и означает, что найдутся два мальчика, которые собрали по одинаковому числу орехов.

**б)** Проанализируем её условие. Пусть n мальчиков имеет по разному числу орехов. Тогда, как было уже установлено при доказательстве принципа недостаточности, они должны были собрать не менее чем $\frac{n(n-1)}{2}$орехов. По условию задачи имеется *k* орехов. Значит, *k ≥* $\frac{n(n-1)}{2}$орехов, то между n мальчиками можно разделить орехи так, чтобы никаким двум из них не досталось орехов поровну. Если же *k <*$\frac{n(n-1)}{2}$, то обязательно найдутся двое, которым орехов досталось поровну. Итак, остаётся поместить число k между двумя такими числами (они называются треугольными), чтобы выполнялись неравенства:

$\frac{n(n-1)}{2}$*≤ k <*$\frac{n(n+1)}{2}$

Тогда для n мальчиков условие задачи не будет выполняться, а для *n+1* уже будет, значит, *n+1* - это и есть искомое количество мальчиков.

**Задача 3.** В районе 15 школ. Докажите, что как бы не распределяли между ними 90 компьютеров, обязательно найдутся две школы получившее одинаковое количество компьютеров (возможно - ни одного).

***Решение.*** Принимая за «клетки» школы района, а за «кроликов» компьютеры, которые распределили между школами, применяя принцип недостаточности (n=15 ), получаем, что в каких-то двух «клетках» находится по равному числу кроликов. Это и означает, что найдутся две школы, которые получили по одинаковому числу компьютеров.

Данный принцип является аналогом принципа Дирихле. С помощью него можно решать задачи, в которых нужно найти два предмета, у которых имеется по одинаковому числу чего-либо. А также для решения задач на данный принцип можно использовать его доказательство.

# 4. Геометрические задачи на принцип Дирихле

Некоторые задачи, в особенности геометрические, решаются при использовании принципа Дирихле со следующими формулировками:

**а)** Если на отрезке длиной *l* расположены несколько отрезков, сумма длин которых больше *l*, тогда, хотя бы, два отрезка имеют общую точку;

**б)** Если внутри фигуры площадью *S* расположены фигуры, сумма площадей которых больше *S*, тогда среди них существуют, по крайней мере, две фигуры, имеющие общую точку;

**в)** Если фигуры *F*1,*F*2, ... ,*Fn* (где *S*1,*S*2, ...,*Sn* - соответственно их площади) расположены в фигуре *F* площадью *S* и *S*1 + *S*2 + ... + *Sn*>*kS*, тогда *k* + 1 из фигур *F*1,*F*2, ... ,*Fn* имеют общую точку.

**Задача 1.** Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 лежат 5 точек. Доказать, что найдутся две точки из пяти, расстояние между которыми меньше 0,5.

***Решение.*** Делим равносторонний треугольник со стороной 1 на четыре равносторонних треугольника со стороной 0,5 (рис. 1).



В одном из этих четырех треугольников лежат, по крайней мере, две из данных точек. Расстояние между этими двумя точками меньше 0,5.

**Задача 2.** На плоскости даны 25 точек таким образом, что две точки из любых трех расположены на расстоянии меньше 1. Доказать, что существует круг радиуса 1, содержащий не менее 13 из данных точек.

***Решение.*** Пусть *A* - одна из данных точек. Если остальные точки находятся внутри круга *S*1 радиуса 1 с центром в точке *A*, тогда задача решена. Пусть *B* - одна из точек, лежащих вне круга *S*1. Рассмотрим круг *S*2 радиуса 1 с центром в точке *B*. Среди точек *A*, *B*, *C*, где *C* - произвольная из данных точек, существуют две, расстояние между которыми меньше 1. Более того, этими точками не могут быть *A* и *B*.

Таким образом, круги *S*1 и *S*2 содержат все исходные точки. То есть, один из этих кругов содержит не менее 13 точек.

**Задача 3.** Каждая грань куба раскрашена в чёрный или белый цвет. Доказать, что найдутся одинаково раскрашенные грани, имеющие общее ребро.

***Решение.***Рассмотрим любую вершину куба. В ней пересекаются три грани. Примем за «клетки» цвета, а за кроликов грани, пересекающиеся в одной вершине (их три). Поэтому согласно принципу Дирихле найдутся два «кролика» в одной «клетке», а это и означает, что найдутся две грани имеющие общее ребро (так как они имеют общую точку) и окрашенные одинаково.

**Задача 4.** В квадрате, составленном из 100 клеток, закрашено менее 50. Доказать, что на не закрашенные клетки можно положить кость домино, покрывающую ровно две клетки.

***Решение.*** Чтобы не было свободной пары клеток, в любой строке должно быть не менее пяти закрашенных клеток. Значит всего должно быть не менее закрашенных 50 клеток, чтобы было невозможно выделить свободный участок 1×2. Поскольку закрашенных клеток менее 50, в силу предложения 1 такой участок существует.

**Задача 5.** На шахматной доске 8×8 расставлена 31 фигура. Доказать, что найдётся свободный треугольник из трёх клеток.

***Решение.***Чтобы не было свободного треугольника, в любом прямоугольнике 2×2 должны быть заняты две клетки, чтобы в него нельзя уже было поместить треугольник. Так как всю доску можно покрыть 16 неперекрывающимися квадратиками 2×2, то всего фигур должно быть 32, а по условию их всего 31. Значит, согласно предложению 1 найдётся квадратик 2×2, в котором окажется только одна фигура, а в ней и содержится свободный треугольник.

**Задача 6.** Игра «Морской бой» происходит в квадрате 7×7. Какое наименьшее количество выстрелов надо сделать, чтобы наверняка «ранить» четырёхпалубный корабль, если он имеет вид?

***Решение.***Всего имеется 49 клеток. В них можно разместить не более 12 непересекающихся корабликов вида 1×4 (на рисунке они помечены звёздочками), например, так:



Значит надо провести не менее 12 выстрелов, чтобы ранить четырёхпалубный корабль. Однако можно, произведя 12 выстрелов, добиться того, чтобы в оставшиеся клетки нельзя было поместить четырёхпалубный корабль. Например, так:



**Задача 7.** В квадрате 5×5 закрашено 16 клеток. Доказать, что найдётся закрашенная фигура - треугольника вида.

***Решение.***Предположим, что в данном квадрате нет закрашенных фигур указанного типа. Тогда в любом квадратике 2×2 закрашено не менее двух клеток. Рассмотрим отмеченный звёздочками квадрат:



Так как в нём нет закрашенных треугольников, то в отмеченных звёздочками клетках - не более 8 закрашенных клеток; значит, вне его не менее 8 закрашенных клеток.

Рассмотрим другой квадрат:



Здесь по аналогичным причинам вне отмеченных звёздочками клеток окажется не менее 8 закрашенных клеток. Значит в граничном «поясе»



будет не менее 14 закрашенных клеток. Всего в нём 16 клеток, поэтому один из четырёх треугольных углов, т.е. фигура вида, будет закрашена.

Идея решения приведённых задач заключалась в нахождении «клеток», т.е. участков, в которых количество закрашенных клеток было постоянным (или ограничено некоторой константой). Этими участками без наложений их друг на друга можно было полностью покрыть рассматриваемую плоскость, что давало необходимые для решения задачи оценки.

Рассмотрим ещё один приём.

**Задача 8.** В клетки прямоугольника 5×41 раскрашены в два цвета. Доказать, что можно выбрать три строки и три столбца так, чтобы все 9 клеток, стоящие на пересечение этих строк и столбцов, были одного цвета.

***Решение.***Получим, что в любом из столбцов будет не менее трёх клеток одного (из двух) цветов. Можно воспользоваться принципом Дирихле, приняв за «клетки» цвета, а за «кроликов» - столбцы; «кролика» сажаем в ту «клетку», которая соответствует цвету большинства его раскрашенных клеток. Тогда получим, что в 21 столбце (из 41) будет по три раскрашенные одним цветом клетки (допустим - первым) . В каждом из этих столбцов три раскрашенные клетки можно расположить 10 способами. Снова в силу принципа Дирихле получаем, что в трёх столбцах (из 21) закрашенные клетки будут располагаться одинаково. Проведём прямые через эти столбцы и через три одинаково закрашенные клетки. Эти 9 клеток пересечения и будут искомыми.

# Заключение

Принцип Дирихле является мощным логическим средством, позволяющем решать задачи с арифметическим и геометрическим содержанием.

Для правильного решения задач на принцип Дирихле крайне важно определить, что принять за «клетки», а что за «кроликов». Обычно «клеток» меньше (больше), чем «кроликов» на одну (или более). Именно это и является «отправной точкой» в начале логических рассуждений, которые и приводят к верному ответу.

В процессе изучения темы я познакомилась с принципом Дирихле и его основными формулировками, научилась решать задачи и выбирать необходимую для решения формулировку принципа Дирихле.

Информация, представленная в данной работе, может быть использована в качестве дополнительного материала на уроках математики для объяснения решения задач на принцип Дирихле. Приведенные в работе задачи можно использовать для подготовки к олимпиадам и математическим конкурсам, так как они позволяют развивать логическое мышление.

# Литература

1. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад - М., Наука, 1975.
2. Математическая энциклопедия (в 5 томах), т.2, М.: Советская Энциклопедия, 1982.
3. Прасолов В.В., Задачи по планиметрии, ч.2, Москва, Наука, 1991.

Открытые источники в сети Интернет:

1. http:// ru.wikipedia.org/wiki/Дирихле,\_Петер\_Густав\_Лежён
2. http://ru.wikipedia.org/wiki/Принцип\_Дирихле